数理解析研究所講究録
1055 巻 1998 年 96-110

測定自由度をもつ統計モデルと量子力学

林 正人 [1] 京都大学 理学研究科 数学教室
松本 啓史 [2] 東京大学 工学部 計数工学科

1 はじめに

一般に未知状態を推測するには状態から何らかの情報を取り出さなければならない．そのような情報を取り出す行為は一般に測定とよばれる．通常の統計的推定の議論においては，測定方法は事前に与えられており，データーからどのように推定量を作るかが考察される．それに対し，本稿では，測定自由度をもつ統計モデル，すなわち測定も統計家の設定に委ねられている状況を考察する．

広く知られているように，いわゆる実験計画法では実験計画，すなわち測定の最適化を行なっている．また，量子状態族の推定問題ではその最初から測定自由度をもつ統計モデルの枠組で理論が構成されてきた．量子状態の統計的推測に関する研究は 1960 年代の後半に光通信の受信過程の最適化に関連して C. W. Helstrom [1] により始められた．そして H. P. Yuen and M. Lax [2] らは背景熱ノイズ中のコヒーレント光の複素振幅の，A. S. Holevo [3, 4] はそれを一般化した量子ガウス状態の期待値パラメーターの，一様最小分散不偏推定量をそれぞれ求めた．また，Holevo の著したテキスト [3] ではいくつかのモデルにおいて，ベイズ推定の枠組から議論がされている．

これらの先行研究では（少なくとも量子状態の推定では）測定は実験を始める前に固定して，それ以降は動かさないことが通常行なわれてる．それに対して本稿では長岡 [5, 6] にならい，データーをもとに測定を逐次改良することを許し，そのようにして再帰的に構成された推定量の一次漸近理論を前半で考察する (§2.1 〜 §3)．しかし，本稿の議論は甚だ不完全なものであり，本格的な理論の建設は今後の課題である (§7)．

長岡 [6] と異り，本稿では量子系, 非量子系を問わない一般的な枠組で，しかもパラメーターが多次元である場合を扱っているが，それはは以下のような理由による．第一に，一般的な枠組で書き直すことにより，複合測定の理論構成における重要性が明らかになる．第二に通常の設定での推定理論と異なり，パラメーターが多次元の場合の理論は一次元の場合の単純な拡張にならならず，その結果リスク関数のとり方に注意しなければならない点が生ずる．第二の点については量子推定論の始研究者の間では早くから強く意識されてきたが，一般の統計学の専門家にはあまりよく知られていないように思われる．

さらに，本稿は後半で量子系特有の問題である，量子相関に推定理論の観点から焦点を当てる．量子系の場合，再帰的に推定量を構成するだけでなく，サンプル間の量子相関を巧妙に用いることにより，さらに推定量を改善できる (§4 〜 §6)．このようなことは非量子系では全く不可能なことであるから，この種の推定量と再帰的な推定量との差を研究することが量子系の特

[1] e-mail address: masahito@kusm.kyoto-u.ac.jp
[2] e-mail address: keiji@expm.t.u-tokyo.ac.jp

徴を明らかにすることになる．しかしながら，長岡 [6] のようにパラメーターが一次元であるモデルしか扱わない場合，両者において推定量の誤差の下限は同じになってしまう．そこで，本稿ではパラメーターを多次元として一般論を記述し，両者の差が表れる具体例を提示する．

以下本稿の構成について述べる．まず最初に，§2 では測定自由度のある統計モデルを定式化し，パラメーターが多次元である場合に推定量のリスク関数をどのように定義したらよいかを考察する．次に §3 では，再帰的な一致推定量の推定誤差の達成可能な下限を一次漸近理論の立場で扱う．

そして §4 で測定自由度をもつモデルの例として量子系を定式化し，§5 では量子力学系特有の，サンプル間の量子相関を利用した推定量について一般的な議論を行なう．続く §6 では量子相関を用いることによって推定精度が上がるモデルとして量子 Spin 1/2 系を取り上げ，最後の §7 で結論と今後の課題を述べる．

2　測定自由度をもつ統計モデルの定式化と例

2.1　測定自由度をもつ統計モデル

この節では測定自由度をもつ推定問題を定式化する．推定問題では被測定系の状態 ρ と測定装置 M に依存して確率分布 P_ρ^M が決まる．測定者が未知状態を推定するために自由に選べる測定 M の集合を測定集合とよび $\mathcal{M} := \{M\}$ と表すことにする．なお，測定集合 $\mathcal{M}$ は，後に §2.3 で定義する複合測定を含むように拡大しておく．

今後，測定 $M \in \mathcal{M}$ の測定値のなす集合を Ω_M と書き対応する σ-field を $\mathcal{F}(\Omega_M)$ と書くことにする．さらに，本稿では未知状態がある状態族 $\mathcal{S} := \{\rho_\theta | \theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^d\}$ に含まれていることが既知であるとき，未知パラメーター θ を測定を通じて統計的に推定する問題を考える．本論文では，長岡とは異なり一般には未知パラメーターが多次元 (d 次元) であるモデルを扱う．今後，測定集合 $\mathcal{M}$ 及び状態族 $\mathcal{S}$ の組 $(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ を測定自由度をもつ統計モデルとよぶことにする．なお，今後簡単のため $P_{\rho_\theta}^M$ を P_θ^M と省略することにする．また確率分布族 $\{P_\theta^M | \theta \in \Theta\}$ の $\theta \in \Theta$ での Fisher 情報行列を J_θ^M と書く．

一般に確率分布族のことを統計モデルとよぶが，確率分布族は測定集合 $\mathcal{M}$ が 1 つの元から構成されている場合の測定自由度をもつ統計モデルになっている．したがって，先に定義した測定自由度をもつ統計モデルは従来の意味での統計モデルの一般化になっている．

測定自由度をもつ統計モデルにおいて推定量は測定 M と測定結果の集合 Ω から $\mathbf{R}^d$ への可測写像 $\hat{\theta}$ の組 $(M, \hat{\theta})$ で表される．ここで真の状態が ρ_θ であるときの推定値の確率分布を $P_\theta^{(M,\hat{\theta})}$ とすると，それは

$$P_\theta^{(M,\hat{\theta})}(B) = P_\theta^M(\hat{\theta}^{-1}(B))$$

で与えられ，その期待値及び平均二乗誤差行列をそれぞれ $E_\theta^i(M, \hat{\theta})$，$V_\theta(M, \hat{\theta})$ と書く．

2.2 量子力学的でない例

ある二次元空間中にある粒子の座標をおなじ二次元空間内にあるカメラの映像を通して推定する問題を考える．測定の際には分散 σ^2 のガウス型の誤差が入る仮定する．ここで，粒子の座標を $\theta = (\theta^1, \theta^2)$ と書くと，状態族は

$$\mathcal{S} := \left\{ \rho_\theta \middle| \theta \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

と書ける．ある方向 $x \in S^1$（ S^2 は1次元球面）から粒子を撮影する，という測定を M_x と書くと，M_x の測定値の集合は x の直交補空間 V_x である．$\mathbf{R}^2$ から V_x への射影を P_x とし V_x の元を ω とすると，各状態 ρ_θ に対して測定 M_x を行ったときに得られる確率分布の密度関数 $p_\theta^{M_x}(\omega)$ は以下で与えられる．

$$p_\theta^{M_x}(\omega) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(2\sigma^2 \left\|\omega - P_x(\theta)\right\|^2\right).$$

一般に k 個の l 次元空間の粒子の座標を m 次元平面上の射影から推定する問題が考えられ，このときの測定自由度もつパラメーターの個数が kl 個の統計モデルを $\mathcal{A}_{l,m}^k$ と書く．

2.3 複合測定

§2.2で挙げた例 $\mathcal{A}_{2,1}^1$ で，測定としてある特定のアングルからの撮影を考えた．しかし，測定のスキームとしては撮影のアングルを乱数で決定することも考えられる．一般には，測定集合のある部分集合 $\mathcal{M}'$ の元を $\mathcal{M}'$ の確率測度 μ で重ね合わせたものを考えることができる．そのような測定のことを複合測定という．$\mathcal{A}_{2,1}^1$ の測定集合 $\mathcal{M}$ は，$\{M_x\}_{x\in S^1}$ およびそれらをある確率測度でかさねあわせた複合測定全体からなる．先に先行して述べたように，一般に我々の枠組では，測定集合といえば複合測定も含むように拡大しておくことにする．

複合測定の測定値の集合については注意が必要である．たとえば，二つのアングル x_1, x_2 を確率的に選んで測定する場合，その測定値のなす集合は V_x ではなく，$V_x \times \{x_1, x_2\}$ である．なぜなら撮影のアングルがちがう像は別のものとして区別されなければ，適切な推定を行なうことはできないからである．つまり，$\mathcal{M}'$ の元を確率測度 μ で重ね合わせた複合測定の測定値の集合は $\Omega := \coprod_{M\in\mathcal{M}'} \Omega_M$ である．

測定 M_1, M_2 を確率 $\lambda, 1-\lambda$ で混合した複合測定を M_λ とかくと，Fisher 情報行列について凸結合則

$$J_\theta^{M_\lambda} = \lambda J_\theta^{M_1} + (1-\lambda) J_\theta^{M_2}, \tag{1}$$

が成り立つ．

2.4 リスク関数と Cramér-Rao 型の下限

通常，推定量のリスク関数として平均二乗誤差行列をもちいることがよく行なわれる．しかし，行列の空間に入る通常の大小関係は全順序構造になっていない．したがって，各点においてすらも平均二乗誤差行列の最小値が存在しないことが十分にあり得る．

なお，今のべている最小値の不存在は，最適な推定量がパラメーターの真の値によって異なるために許容的な推定量が複数あるというという議論とは関係がない．問題にしているのは飽くまでも各点において最適な推定量の存在であり，これは通常の推定理論では常に保証されている．また，下限の設定が最適でないために達成可能でない，といった議論[3]も全く関係がない．我々が議論しているのは達成可能な，最適な下限であるが，それがそもそも存在しないのである．

このことを例 $\mathcal{A}^1_{2,1}$ を用いて具体的に説明する．y 軸の方向から非常に多く像をとる測定から得られる推定量は他の推定量にくらべて x 成分の推定量の平均二乗誤差は小さいが，かといって y 成分の推定量の平均二乗誤差は逆に大きくなってしまう．y 成分の推定量を改良するために他のアングルからの撮影を増やすと，x 成分の推定量は悪化してしまう．よって，x 成分の推定量と y 成分の推定量の平均二乗誤差を一様に小さくすることはできず，平均二乗誤差行列の最小値は存在しないことがわかる．

そこで，リスク関数として平均二乗誤差行列 V そのものではなく，その成分の重みつき和 $\mathrm{Tr}\,GV$ を用いる．ここで G は実正定値対称行列で，重み行列とよばれる．x 成分の推定の精度を高く要求する場合は，G の $(1,1)$ 成分を大きくとって，$\mathrm{Tr}\,GV$ を最小にする推定量をえらべばよい．

ここで重み行列 $G>0$ ($d\times d$ の実対称行列) に対して以下のように Cramér-Rao 型の下限 $C_\theta(G)$ を導入する:

$$C_\theta(G) := \inf\left\{ \mathrm{Tr}\,G\left(J^M_\theta\right)^{-1} \middle| M\in\mathcal{M}\right\}. \tag{2}$$

さらに，Fisher 情報行列に関して次の集合 $\mathcal{J}_\theta$ を定義する．

$$\mathcal{J}_\theta := \bigcap_{M\in\mathcal{M}} \left\{ J \text{ 実対称行列 } \middle| J^M_\theta \le J \right\}. \tag{3}$$

一般には $\mathcal{J}_\theta$ の最小元は存在しないが最小元が存在するときは J_θ と書くことにする．すると $\mathcal{J}_\theta$ の定義から直ちに次の不等式が成立する．

$$C_\theta(G) \ge C^S_\theta(G) := \sup_{J\in\mathcal{J}_\theta} \mathrm{Tr}\,GJ^{-1} \tag{4}$$

なお, 一般には (4) では等号は成立しない．

3 再帰的推定量と漸近的限界

3.1 再帰的推定量の漸近的不等式

この節では k 個目のサンプルを測定するときに $k-1$ 個までのサンプルを測定して得られた $k-1$ 個のデータ $(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})$ から k 個目のサンプルに対する測定 $M_k(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})$ を決定できるような推定方法を扱うことにする．このような手法で構成される推定量を本稿では再帰的推定量

[3]例えば Cram e-Rao の下限が Bhattachryya の下限で改良される，などの議論のことを指す．

とよぶ．数学的には再帰的推定量は再帰的に構成される測定の系列 $\{M_k(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})\}_{k=1}^n$ と n 個のデータ $(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ から推定値を与える関数を $\hat{\theta}_n$ の組 $\underline{\mathcal{E}_n := (\{M_n\},\hat{\theta}_n)}$ で表される．ここで n はサンプル数を表す．なお同一の測定 M を n 回繰り返す測定系列を $\underline{M\times n}$ と書くことにする．

まずここで，再帰的推定量の系列 $\{\mathcal{E}_n\}_{n=1}^\infty$ に対して次のように一致性を定義する．ただし，以下では状態 ρ_θ に再帰的な測定 $\{M_n\}$ を施して得られる n 個の測定値の同時確率分布を $P_\theta^{\{M_n\}}$ で表す．

定義 1 再帰的推定量の系列 $\{\mathcal{E}_n\}_{n=1}^\infty$ が次の式を満たす場合，MSE 一致推定量とよぶ．

$$\lim_{n\to\infty}\int\left\|\hat{\theta}_n-\theta\right\|^2 P_\theta^{\{M_n\}}(d\hat{\theta}_1,\ldots,d\hat{\theta}_n)=0,\quad \forall\theta\in\Theta$$

真の状態が ρ_θ であるときの推定量 $\mathcal{E}_n=(\{M_n\},\hat{\theta}_n)$ の平均二乗型誤差 $V_\theta(\mathcal{E}_n)$ に関して次の定理を得る．

定理 2 推定量の系列 $\{\mathcal{E}_n\}_{n=1}^\infty$ が MSE 一致推定量であり，$\lim_{n\to\infty} nV_\theta(\mathcal{E}_n)$ が存在するとき，次の不等式が成立する：

$$\varliminf_{n\to\infty} n\,\mathrm{Tr}\,GV_\theta(\mathcal{E}_n)\ge C_\theta(G), \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} nV_\theta(\mathcal{E}_n)\ge J^{-1},\quad \forall J\in\mathcal{J}_\theta. \tag{6}$$

ただし (6) の下限は行列値であるので，一般には達成できない．しかし (5) の下限は定理 3 に見るように適当な正則性条件の下で達成できる．

なお，定理 2 が成り立つためには．測定集合に複合測定が含まれるようにしてあることが本質的に重要である．たとえば例 $\mathcal{A}_{2,1}^1$ で，複合測定を測定集合から排除してみる．すると，複数回の測定では異なったアングルからの測定を行なうことにより，粒子の座標の異なった成分についてそれなりの情報をえることができるのに対し，一度だけの固定されたアングルからの測定ではある成分についての情報は全く失われてしまう．すなわち，重み行列 G のとり方によっては式 (5) の右辺が左辺を下回り，定理は成立しない．

証明 確率分布族 $\{P_\theta^{\{M_n\}}\}$ の Fisher 情報行列を $J_\theta^{\{M_n\}}$ と書くと，

$$J_\theta^{\{M_n\}}=\sum_{k=1}^n\int_{\Omega^{k-1}} J_\theta^{M_k(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})}P_\theta^{\{M_{k-1}\}}(d\omega_1,\ldots,d\omega_{k-1})$$

ここで $k\le n$ なる k について，測定 $M_k(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})$ を確率 $\frac{1}{n}P_\theta^{\{M_{k-1}\}}(d\omega_1,\ldots,d\omega_{k-1})$ で行なう複合測定を $M_\theta^n\in\mathcal{M}$ で表すことにすると，(1) から次の式を得る：

$$J_\theta^{M_\theta^n}=\frac{1}{n}J_\theta^{\{M_n\}}. \tag{7}$$

Jensen の不等式を用いることにより MSE 一致性から次の漸近的不偏性が導ける：

$$(A_n)^i_j := \frac{\partial}{\partial\theta^j} E^i_\theta(\mathcal{E}_n) \to \delta^i_j \quad \text{as } n \to \infty. \tag{8}$$

また (3) 及び (7) より，

$$nV_\theta(\mathcal{E}_n) \geq nA_n \left(J_\theta^{\{M_n\}}\right)^{-1} {}^tA_n = A_n \left(J_\theta^{M_\theta^n}\right)^{-1} {}^tA_n \geq A_n (J)^{-1} {}^tA_n, \quad \forall J \in \mathcal{J}_\theta \tag{9}$$

を得，これと (8) より直ちに (6) を得る．さらに，(2) 及び (9) より

$$\mathrm{Tr}\, GnV_\theta(\mathcal{E}_n) \geq \mathrm{Tr}\, GA_n \left(J_\theta^{M_\theta^n}\right)^{-1} {}^tA_n \geq C_\theta({}^tA_n G A_n) \tag{10}$$

したがって (8) 及び (10) より (5) を得る． □

3.2 量子力学的でない例での計算

この節では §2.2 で定義した例 $\mathcal{A}^1_{2,1}$ について $C_\theta(G)$ の値を可能なものについて具体的に与える．ただし，証明は省く．

このモデルにおいて $\mathcal{J}_\theta$ の最小元 J_θ は存在し，それは $l=m$，すなわち粒子の座標の全ての成分が同時に観測できるときの Fisher 情報行列で表される．

今考えているパラメーター空間は kl 次元であるがこの空間は $\mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^l$ と考えることができる．このとき G は テンソル空間 $\mathbf{R}^k \otimes \mathbf{R}^l$ 上の行列であるが $\mathbf{R}^l$ に関して partial trace を取ったものを G'' と書き，$\mathbf{R}^k$ 上の行列 G' を $G' := \sqrt{J_\theta}^{-1} G'' \sqrt{J_\theta}^{-1}$ で定義する．さらに,O を OG'^tO が対角行列で対角成分が大きい順に並ぶようになる直交行列とする．このとき $C_\theta(G)$ は次のように与えられる：

$$C_\theta(G) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m-1} (OG'^tO)_{i,i} + \left(\sum_{i=m}^{l} \sqrt{OG'^tO}_{i,i}\right)^2 \\ \qquad \text{if } \sqrt{OG'^tO}_{m-1,m-1} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=m-1}^{l} \sqrt{OG'^tO}_{i,i} \\ \sum_{i=1}^{m-2} (OG'^tO)_{i,i} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=m-1}^{l} \sqrt{OG'^tO}_{i,i}\right)^2 \\ \qquad \text{if } \sqrt{OG'^tO}_{m-2,m-2} \geq \frac{1}{3} \sum_{i=m-2}^{l} \sqrt{OG'^tO}_{i,i}, \\ \qquad \text{and } \sqrt{OG'^tO}_{m-1,m-1} < \frac{1}{2} \sum_{i=m-1}^{l} \sqrt{OG'^tO}_{i,i} \\ \qquad \vdots \\ \sum_{i=1}^{j} (OG'^tO)_{i,i} + \frac{1}{m-j}\left(\sum_{i=j+1}^{l} \sqrt{OG'^tO}_{i,i}\right)^2 \\ \qquad \text{if } \sqrt{OG'^tO}_{m-j,m-j} \geq \frac{1}{j+1} \sum_{i=m-j}^{l} \sqrt{OG'^tO}_{i,i}, \\ \qquad \text{and } \sqrt{OG'^tO}_{m-j+1,m-j+1} < \frac{1}{j} \sum_{i=m-j+1}^{l} \sqrt{OG'^tO}_{i,i} \\ \qquad \vdots \\ \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{l} \sqrt{OG'^tO}_{i,i}\right)^2 \\ \qquad \text{if } \sqrt{(OG'^tO)}_{1,1} < \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{l} \sqrt{OG'^tO}_{i,i} \end{cases}$$

3.3 下限の達成

ここでは，(5) の下限がある正則性条件の下で達成されることを示す.

定理 3 モデルが正則性性条件 (B.1) ～ (B.5) を満たとする. このとき, b_n を $\lim_{n\to\infty} b_n/n = 0$ とすると, 任意の $\theta \in \Theta$ について以下に定義する再帰的推定量 $\mathcal{E}(b_n)$ について次の式を得る：

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{Tr} G V_\theta(\mathcal{E}(b_n)) = C_\theta(G). \tag{11}$$

b_n を自然数列としたとき再帰的推定量 $\mathcal{E}(b_n)$ のは次のように定義される.

未知状態 ρ_θ の n 個のサンプルを b_n 個のサンプルからなる第一群と残りの第二群とに分ける．まず，第一群のサンプルに測定 M_0 を施し，確率分布族 $\{P_\theta^{M_0\times n}|\theta \in \Theta\}$ の最尤推定量 $\check{\theta}_n$ を得る．次に，

$$\operatorname{Tr} G \left(J_{\check{\theta}_n}^{M_{\check{\theta}_n}}\right)^{-1} = C_{\check{\theta}_n}(G)$$

を満たす推定量 $M_{\check{\theta}_n}$ を第二群のサンプルに行ない，そして確率分布族 $\{P_\theta^{M_{\check{\theta}_n}\times(n-b_n)}|\theta \in \Theta\}$ での最尤推定量 $\hat{\theta}_{\check{\theta}_n}$ を最終的な推定値とする.

3.3.1 正則性性条件

正則性条件 (B.1) ～ (B.5) は次のように与えられる.

(B.1) 確率分布族 $\{P_\theta^{M_0\times b_n}|\theta \in \Theta\}$ の最尤推定量 $\check{\theta}_n$ が，次式をみたすような測定 $M_0 \in \mathcal{M}$ が存在する：

$$\lim_{n\to\infty} n P_\theta^{M_0\times b_n}\{d(\theta, \check{\theta}_n) > \delta\} = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

(B.2) パラメーター空間 Θ が有界である.

(B.3) 任意の $\theta \in \Theta$ に対して以下の条件を満たす測定 M_θ が存在する:

$$\operatorname{Tr} G \left(J_\theta^{M_\theta}\right)^{-1} = C_\theta(G).$$

(B.4) 任意の $\epsilon > 0, \theta \in \Theta$ に対して以下の条件を満たす $\delta_1 > 0$ と十分大きな自然数 N が存在する:

$$\left| n \operatorname{Tr} G V_{\theta,n} - \operatorname{Tr} G \left(J_\theta^{M_{\check{\theta}}}\right)^{-1} \right| < \epsilon, \quad \forall n \geq N, \ \forall \check{\theta} \ \ s.t. \ \ d(\theta, \check{\theta}) \leq \delta_1.$$

ここで $V_{\theta,n}$ で確率分布族 $\{P_\theta^{M_{\check{\theta}}\times n}|\theta \in \Theta\}$ の最尤推定量の平均二乗誤差行列をあらわすことにする.

(B.5) 任意の $\epsilon > 0, \theta \in \Theta$ に対して以下の条件を満たす $\delta_2 > 0$, が存在する:

$$\left|\mathrm{Tr}\, G\left(J_\theta^{M_{\check{\theta}}}\right)^{-1} - C_\theta(G)\right| < \epsilon, \quad \forall\theta,\ \forall\check{\theta}\ \ s.t.\ d(\theta,\check{\theta}) < \delta_2.$$

この正則性条件に関して次の補題が成立する．証明は付録で行なう．

補題 4 (B.3) 及び次の条件 (B.5.1)(B.5.2) が成立するとき (B.5) が成立する.

(B.5.1) 写像 $\theta \to C_\theta(G)$ が連続.

(B.5.2) 任意の $\epsilon > 0, \theta \in \Theta$ に対して以下の条件を満たす $\delta > 0$, が存在する:

$$\left|P_\theta^{M_{\check{\theta}}}(B) - P_{\check{\theta}}^{M_{\check{\theta}}}(B)\right| < \epsilon, \quad \left|\frac{\partial}{\partial\theta^i}P_\theta^{M_{\check{\theta}}}(B) - \frac{\partial}{\partial\theta^i}P_{\check{\theta}}^{M_{\check{\theta}}}(B)\right| < \epsilon,$$
$$1 \le \forall i \le d,\ \forall B \in \mathcal{F}(\Omega_{M_{\check{\theta}}}),\ \forall\check{\theta}\ s.t.\ d(\theta,\check{\theta}) < \delta.$$

3.3.2 (11) の証明

任意の $\epsilon > 0, \theta \in \Theta$ に対して, (B.4)(B.5) の条件を満たすように δ_1, δ_2 及び自然数 N を取る．さらに $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ とする．このとき, $n - b_n \ge N$ ならば,

$$\begin{aligned}
& n\,\mathrm{Tr}\, GV_\theta(\mathcal{E}_n) \\
&= n\int_{\Omega^{b_n}} \mathrm{Tr}\, GV_\theta(M_{\check{\theta}_n} \times (n-b_n), \hat{\theta}_{\check{\theta}_n}) P_\theta^{M_0\times b_n}(d\omega) \\
&\le n\int_{d(\theta,\check{\theta}_n)\le\delta} \mathrm{Tr}\, GV_\theta(M_{\check{\theta}_n} \times (n-b_n), \hat{\theta}_{\check{\theta}_n}) nP_\theta^{M_0\times b_n}(d\omega) + K^2\,\mathrm{Tr}\, G\int_{d(\theta,\check{\theta}_n)>\delta} P_\theta^{M_0\times b_n}(d\omega) \\
&\le \frac{n}{n-b_n}\int_{d(\theta,\check{\theta}_n)\le\delta} \left(\mathrm{Tr}\, G\left(J_\theta^{M_{\check{\theta}_n}}\right)^{-1} + \epsilon\right) P_\theta^{M_0\times b_n}(d\omega) + nK^2\,\mathrm{Tr}\, GP_\theta^{M_0\times b_n}\{d(\theta,\check{\theta}_n) > \delta\} \\
&\le \frac{n}{n-b_n}\int_{d(\theta,\check{\theta}_n)\le\delta} (C_\theta(G) + 2\epsilon)\, P_\theta^{M_0\times b_n}(d\omega) + nK^2\,\mathrm{Tr}\, GP_\theta^{M_0\times b_n}\{d(\theta,\check{\theta}_n) > \delta\} \\
&\le \frac{n}{n-b_n}(C_\theta(G) + 2\epsilon) + nK^2\,\mathrm{Tr}\, GP_\theta^{M_0\times b_n}\{d(\theta,\check{\theta}_n) > \delta\},
\end{aligned}$$

が成立する．ただし, ここで (B.2) より $\sup_{\theta\in\Theta}\|\theta\| = K$ とおいた．以上より，条件 (B.1) から第3項は $n \to 0$ で0になるので,

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{Tr}\, GV_\theta(\mathcal{E}_n) \le C_\theta(G) + 2\epsilon$$

を得，ϵ が任意であることとから (11) を得る.

4 量子力学系

この節では今まで扱ってきた測定自由度をもつ統計モデルとして量子状態の推定問題を扱う．量子力学では，状態はある複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の Hermite 非負定値作用素でトレースが 1 のもので表される．どのようなヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ をとるかは対象となる系によって異なり，量子系の表現空間という．表現空間が $\mathcal{H}$ となる量子系の状態の集合を $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で表すことにする．

次に測定であるが，測定値のなす集合が Ω_0 となる測定は $\mathcal{F}(\Omega_0)$ (Ω_0 上の σ-field) の各要素 B に対して $\mathcal{H}$ 上の作用素 $M(B)$ を対応させる写像 $M : B \mapsto M(B)$ で表される．ただし，M は次の条件を満たす：

- $\forall B \in \mathcal{F}(\Omega_0) \quad M(B) = M(B)^* \geq 0$ (Hermite 非負定値)，
- $M(\emptyset) = 0,\ M(\Omega_0) = \mathrm{Id}$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j)$ を満たす加算個の集合列 $\{B_j\} \subset \mathcal{F}(\Omega_0)$ に対し $\sum_j M(B_j) = M\left(\bigcup_j B_j\right)$．

このような条件を満たす写像 M を $\mathcal{H}$ 上の測定値の集合を Ω_0 に持つ量子測定とよび，その全体を $\mathcal{M}(\Omega_0, \mathcal{F}(\Omega_0), \mathcal{H})$ で表すことにする．状態 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ に対して測定 $M \in \mathcal{M}(\Omega_0, \mathcal{F}(\Omega_0), \mathcal{H})$ を行ったときに得られる確率分布は

$$P_\rho^M(B) = \mathrm{tr}\,\rho M(B), \quad \forall B \in \mathcal{F}(\Omega_0),$$

で表される[4]．

量子系の測定自由度を持つ統計モデルでは状態族は $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ の部分集合

$$\mathcal{S} := \left\{\rho_\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \,\middle|\, \theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^d\right\}$$

であり，測定としては任意の集合 Ω_0 の要素を測定値にもつ測定全体を考える．このように測定集合をとっておくと，複数の測定を確率的に重ね合わせた複合測定も自然に測定集合に含まれる．

以下では表記の簡略化のために，測定と推定値の組を考えるのではなく，推定値そのものを返す測定 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \mathcal{H})$ を推定量と考える．実際，任意の推定量 $(M, \hat{\theta})$ に対して，測定値の集合を $\mathbf{R}^d$ に持つ量子測定 $M_0 \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \mathcal{H})$

$$M_0(B) := M(\hat{\theta}^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$$

を定義すれば，

$$P_\rho^M(\hat{\theta}^{-1}(B)) = P_\rho^{M_0}(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \quad \forall \theta \in \Theta \tag{12}$$

が任意の状態 ρ について成立するので，推定量 $(M, \hat{\theta})$ と測定 $M_0 \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \mathcal{H})$ の測定値の統計的振舞いは全く同じである．したがって今後量子系では測定値の集合を $\mathbf{R}^d$ に持つ量子測定 $(\mathcal{M}(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \mathcal{H}))$ で推定量を定義することにする．

[4]ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のトレースをパラメーター空間上のトレース Tr と区別して tr 表すことにする．

なお，量子系では $\mathcal{J}_\theta$ の最小元 J_θ は存在しSLD Fisher 情報行列とよばれ,以下で与えられる．まず対称対数微分 (SLD) $L_{\theta,i}$ を以下の式を満たすように定義する．

$$\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta^i} = \frac{1}{2}\left(\rho_\theta L_{\theta,i} + L_{\theta,i}\rho_\theta\right)$$

ρ_θ が退化していないときはSLD$L_{\theta,i}$ は一意に存在する．このSLDから Fisher 情報行列すなわち, 対称対数微分 (SLD) Fisher 情報行列 $J_{\theta,i,j}$ が次のように定義される．

$$J_{\theta,i,j} := \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L_{\theta,i}\rho L_{j,\theta} + L_{j,\theta}\rho L_{\theta,i})$$

なお ρ_θ が退化しているときはSLD L_θ の取り方に自由度はあるものの, J_θ については一意に定まる．今定義した, J_θ が $\mathcal{J}_\theta$ の最小元となるが, このことの証明については藤原 [8] 等を参照のこと．

しかし §2.4 及び §3 でも述べたように平均二乗誤差に関して我々の情報の限界を表す量は C_θ であって, J_θ ではない．ところが，一般に量子系でも C_θ は以下に挙げる例を除いては求まっていない．１つ目は量子ガウス状態の推定問題であるがこれは Yuen, Lax [2], Holevo [3] 等により解決された．２つ目は純粋状態の推定問題であり, これは長岡,藤原 [9],松本 [10] 等の努力で大幅に研究が進んだ．３つ目は Spin 1/2 系 (量子 2 準位系) の推定問題でこれは長岡 [11], 林 [12, 13] により解決された．

なお,この節で導入した量子系についても再帰的推定量に関しては §3 の理論が適用できる．§3.3 での正則性条件 (B.5.2) は量子系では次の (B.5.3) に置き換えられる．

(B.5.3) 任意の $\epsilon > 0$ に対して以下の条件を満たす $\delta > 0$ が存在する:

$$\operatorname{tr}|\rho_\theta - \rho_{\theta_0}| < \epsilon, \quad \operatorname{tr}\left|\frac{\partial \rho_\theta}{\partial \theta^i} - \frac{\partial \rho_{\theta_0}}{\partial \theta^i}\right| < \epsilon, \quad \forall i\, \forall\theta,\ \forall\theta_0\ \ s.t.\ \ d(\theta,\theta_0) < \delta$$

5 量子相関を用いたパラメーター推定

これまでの節では複数のサンプルが準備されたときに個々のサンプルを個別に測定する場合について考えていた．しかし，量子系ではサンプル同士を相互作用させてから測定することによって，より推定誤差の小さい推定量を構成することができる．このような測定を量子相関を用いた測定とよぶことにする．

この節ではまず n 個のサンプルに対する量子相関を用いた測定を定義するために n 個のサンプルからなる合成系の数学的記述を与える．表現空間が $\mathcal{H}$ となる n 個の粒子からなる量子系の表現空間は拡大テンソル空間 $\mathcal{H}^{(n)}$ で表され, 状態 ρ が n 個独立に存在するとき合成系上での状態はテンソル状態 $\rho_\theta^{(n)}$ で表される．拡大テンソル空間 $\mathcal{H}^{(n)}$ 及びテンソル状態 $\rho_\theta^{(n)}$ の定義は以下で与えられる:

$$\mathcal{H}^{(n)} := \underbrace{\mathcal{H}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}}_{n}, \quad \rho_\theta^{(n)} := \underbrace{\rho_\theta\otimes\cdots\otimes\rho_\theta}_{n}.$$

したがって, 未知状態 ρ_θ が n 個準備されたとき, 我々は状態族 $\{\rho_\theta^{(n)}|\theta\in\Theta\}$ の推定問題を扱うことになる.

推定量としては $\mathcal{H}^{(n)}$ 上の測定値の集合を $\mathbf{R}^d$ に持つ量子測定 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d,\mathcal{B}(\mathbf{R}^d),\mathcal{H}^{(n)})$ を考えることにする. 例えば n 個のサンプルに対する量子的な再帰的推定量 $(\{M_k(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})\}_{k=1}^n,\hat{\theta}_n)$ は $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d,\mathcal{B}(\mathbf{R}^d),\mathcal{H}^{(n)})$ の元としては次のように表現される：

$$M(B)=\int_{\hat{\theta}_n(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})\in B}\bigotimes_{k=1}^n M_k(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})(d\omega_k). \tag{13}$$

したがって再帰的推定量は今考えている推定量のクラスに含まれる. しかも (13) のようには書けない $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d,\mathcal{B}(\mathbf{R}^d),\mathcal{H}^{(n)})$ の元もあり, それらが本節の冒頭に述べた「量子相関を用いた測定」である. 従って, このクラスは再帰的推定量よりもよい推定量を含む可能性がある. このようにサンプル間の相関を用いる推定量を構成することは一般の測定自由度をもつ統計モデルでは不可能なことである.

この節の目的は $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d,\mathcal{B}(\mathbf{R}^d),\mathcal{H}^{(n)})$ の中で推定誤差の限界を考察することにある. まず, MSE 一致推定量を次のように定義する.

定義 5 拡大テンソル空間 $\mathcal{H}^{(n)}$ 上の測定値の集合を $\mathbf{R}^d$ に持つ量子測定の系列 $\{M^n\}_{n=1}^\infty$ が以下の式を満たすとき *MSE* 一致推定量とよぶ：

$$\inf_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d}\|\hat{\theta}-\theta\|^2\,\mathrm{tr}\,\rho_\theta^{(n)}M^n(\,d\hat{\theta})=0.$$

以下に示すように, MSE 一致推定量の誤差の達成可能な下限は次に定義する漸近的 Cramér-Rao 型の下限 $C_\theta^A(G)$ で与えられる. すなわち, 独立にサンプルが n 個準備されたときに構成される状態族 $\{\rho_\theta^{(n)}|\theta\in\Theta\}$ における θ での Cramér-Rao 型の下限を $C_\theta^n(G)$ で表すと, 漸近的 Cramér-Rao 型の下限 $C_\theta^A(G)$ は

$$C_\theta^A(G):=\varliminf_{n\to\infty} nC_\theta^n(G)$$

で定義される. $C_\theta(G)\geq nC_\theta^n(G)$ となることから次の関係式が分る：

$$C_\theta(G)\geq C_\theta^A(G).$$

定理 6 *MSE* 一致推定量 $\{M^n\}_{n=1}^\infty$ に対して以下の不等式が成立する：

$$\varliminf_{n\to\infty} n\,\mathrm{tr}\,GV_\theta(M^n)\geq C_\theta^A(G). \tag{14}$$

証明 Jensen の不等式より

$$(A_n)_j^i:=\frac{\partial}{\partial\theta^j}E_\theta^i(M)\to\delta_j^i \tag{15}$$

となる．また,

$$
\begin{aligned}
V_\theta\left(M^n\right) &\geq A_n\left(J_\theta^{M^n}\right)^{-1}\ {}^t A_n, \\
n \operatorname{Tr} G V_\theta\left(M^n\right) &\geq n \operatorname{tr} G A_n\left(J_\theta^{M^n}\right)^{-1}\ {}^t A_n \\
&\geq n C_\theta^n\left({}^t A_n G A_n\right),
\end{aligned}
$$

が成り立ち，両辺で $lim_{n\to\infty}$ を取ることにより (15) より (14) を得る． □

各 n に対して量子状態族 $\{\rho_\theta^{(n)} | \theta \in \Theta\}$ が正則性条件 (B.1) ～ (B.5) を満たすとき, 定理 3 の系として以下の定理を得る．

定理 7 任意の $\epsilon > 0$ に対してモデル全体で $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{tr} G V_\theta\left(M^n\right) \leq C_\theta^A(G) + \epsilon$ となる一致推定量 $\{M^n\}_{n=1}^\infty$ を構成することができる．

証明 n 個のサンプルを n_1 個のサンプルからなる n_2 個の群に分け，問題を量子状態族 $\{\rho_\theta^{(n_1)} | \theta \in \Theta\}$ の n_2 個のサンプルによる推定と捉え直す．n_1 を固定したまま n，すなわち n_2 を大きくしていくと定理 3 より

$$
\lim_{n\to\infty} n \operatorname{tr} G V_\theta\left(M^n\right) = \lim_{n_2\to\infty} n_1 n_2 \operatorname{tr} G V_\theta\left(M^n\right) = n_1 C_\theta^{n_1}(G) \tag{16}
$$

を満たす一致推定量を構成できることがわかる．ここで n_1 は任意であるから，任意の ϵ に対して十分大きな n_1 をとることにより，$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{tr} G V_\theta\left(M^n\right) \leq C_\theta^A(G) + \epsilon$ を満たす一致推定量を構成できる． □

6 量子 Spin 1/2 系

この節では量子 Spin 1/2 系を例にとって，サンプル間の相互作用をよるすことにより，確かに推定の誤差を減少させることができることを示す．量子 Spin 1/2 系とは電子の自転による角運動量を表す量子系のことをいい, 表現空間は 2 次元複素ベクトル空間 $\mathbf{C}^2$ になる．一般に表現空間が 2 次元複素ベクトル空間 $\mathbf{C}^2$ になる量子系は量子 2 準位系とよばれる．

このような量子系においては状態のなす集合 $\mathcal{S}(\mathbf{C}^2)$ はトレースが 1 である 2×2 の非負定値複素エルミート行列であり重み行列 G は 2×2 の正定値実対称行列で，その成分を

$$
G = \begin{pmatrix} g_1 + g_2 & g_3 \\ g_3 & g_1 - g_2 \end{pmatrix} > 0
$$

のように書く．

Spin 1/2 系ではフルモデル及び任意の部分状態族に対して $C_\theta(G)$ 及び $C_\theta^A(G)$ は具体的に計算されているが [11, 12, 13]，簡単のために以下の二次元の未知パラメーターをもつ 2 つの部分状態族のみ考えることにする．

未知パラメーターが一次元のモデルでは $C_\theta(G)$ と $C_\theta^A(G)$ は一致してしまうことが一般に知られている [6] ので，扱わない．また，ρ_θ の rank が 1 であるときは $C_\theta(G)$ と $C_\theta^A(G)$ が一致することを一般に示すことができるが，ここでは例において検証するにとどめる．

6.1 部分状態族 $\mathcal{S}_1$

部分状態族 $\mathcal{S}_1$ を以下のように定義する：

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ \rho_{(\theta^1,\theta^2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\theta^1 & \theta^2 \\ \theta^2 & 1-\theta^1 \end{pmatrix} \middle| \|\theta\|^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 \leq 1 \right\}. \tag{17}$$

条件 $\|\theta\|^2 \leq 1$ は $\rho(\theta)$ の非負定値性を保証するために課されている．

$C_\theta(G)$ 及び $C_\theta^A(G)$ は次のようになる：

$$\begin{aligned} C_\theta(G) &= \left(2 - \|\theta\|^2\right) g_1 - \|\theta\|^2 a(G,\theta) + \sqrt{\left(1 - \|\theta\|^2\right)\left(g_1^2 - g_2^2 - g_3^2\right)} \\ &\geq \left(2 - \|\theta\|^2\right) g_1 - \|\theta\|^2 a(G,\theta) = C_\theta^A(G) = C_\theta^S(G). \end{aligned} \tag{18}$$

ここで，$a(G,\theta) := |g_2 \cos 2\phi + g_3 \sin 2\phi|$,　$\phi := \arctan \frac{\theta^2}{\theta^1}$ とおいた．

(18) で示されるように $C_\theta^A(G)$ は $C_\theta(G)$ を下回り，量子相関が有効に活用できることがわかる．また，二つの下限が一致するための必要十分条件は $\operatorname{rank}\rho = 1$ であることが (18) からわかる．

6.2 部分状態族 $\mathcal{S}_2(r)$

部分状態族 $\mathcal{S}_2$ を以下のように定義する：

$$\mathcal{S}_2(r) := \left\{ \rho_{(\theta,\phi)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + r\cos\theta & r\sin\theta e^{i\phi} \\ r\sin\theta e^{-i\phi} & 1 - r\cos\theta \end{pmatrix} \middle| 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi \right\}.$$

ここで r は既知の定数で，$\rho_{(\theta,\phi)}$ の非負定値性から $0 \leq r \leq 1$ の値をとる．(θ,ϕ) が推定の対象になるパラメーターである．

このモデルの $C_{\theta,\phi}(G)$ 及び $C_{\theta,\phi}^A(G)$ について次のような関係式を得る：

$$C_{\theta,\phi}(G) = \frac{2}{r^2}\left(g_1 + \sqrt{g_1^2 - g_2^2 - g_3^2}\right) \geq \frac{2}{r^2}\left(g_1 + r\sqrt{g_1^2 - g_2^2 - g_3^2}\right) = C_{\theta,\phi}^A(G). \tag{19}$$

(19) の両辺の差がサンプル間の量子相関を用いることによる効果である．なお，等号が成立するための必要十分条件は $\operatorname{rank}\rho = 1$ であることがここでも確認できる．

7 結論と今後の課題

本稿の前半では測定自由度をもつ統計モデルにおける，再帰的な推定量の一次漸近論を提示したが，以下の点が特に不完全である．まず，下限の達成における正則性条件 (B.5) が非常にアド・ホックでしかも個々の例においてチェックすることが困難である．その上，証明に使われた推定量は実用的でないばかりでなく，裾が重く，大偏差型の評価をした場合には漸近有効

でない可能性が高い．また,大偏差型の評価の理論については，Bahadur型の不等式の証明に完全なものが未だない[5].

後半では，量子 Spin 1/2 系の例を用いて量子相関を用いたときの下限 C_θ^A はそうでないときの下限を下回ることがあることを示すことに成功した．ただし，C_θ^A の達成可能性の証明は未完成の前半の議論を援用している点で，まだ完璧とはいえない．

今後の課題の第一は前半の再帰的推定量の一次漸近理論の十分な理論の構築である．これは後半の議論を完璧なものにためにも重要である．もう一つの課題は量子相関を用いた推定の，量子 Spin 1/2 以外の場合の理論である．量子相関が有効に働くための必要十分条件など，多くの問題が残されている．

A　付録：補題4の証明

証明　ここで,推定量 $(M,\hat{\theta})$ に対して, $A_\theta(M,\hat{\theta}), B_\theta(M,\hat{\theta})$ を次のように定義する：

$$\left(A_\theta\left(M,\hat{\theta}\right)\right)_j^i := \frac{\partial}{\partial\theta^j}\int_\Omega \hat{\theta}^i(\omega)P_\theta^M(\,d\omega),$$
$$\left(B_\theta\left(M,\hat{\theta}\right)\right)^i := \int_{\Omega_M}\left(\hat{\theta}^i(\omega)-\theta^i\right)P_\theta^M(\,d\omega).$$

条件 (B.5.2) より任意の $\epsilon>0$ に対して以下の条件を満たす $\delta>0$ が存在する:

$$\left\|A_\theta\left(M_{\check\theta},\hat\theta_{\check\theta}\right)-A_{\check\theta}\left(M_{\check\theta},\hat\theta_{\check\theta}\right)\right\|<\epsilon,\ \left\|B_\theta\left(M_{\check\theta},\hat\theta_{\check\theta}\right)-B_{\check\theta}\left(M_{\check\theta},\hat\theta_{\check\theta}\right)\right\|<\epsilon,$$
$$\left\|V_\theta\left(M_{\check\theta},\hat\theta_{\check\theta}\right)-V_{\check\theta}\left(M_{\check\theta},\hat\theta_{\check\theta}\right)\right\|<\epsilon,\qquad \forall\theta,\ \forall\check\theta\ \ s.t.\ \ d(\theta,\check\theta)<\delta.$$

次に推定量 $(M_{\check\theta},\hat\theta_{\check\theta})$ に対して $\theta\in\Theta$ での局所不偏推定量 $(M_{\check\theta},\tilde\theta_\theta)$ を次のように定義する：

$$\tilde\theta_\theta(\omega):=f\left(A_\theta\left(M_{\check\theta},\hat\theta_{\check\theta}\right),B_\theta\left(M_{\check\theta},\hat\theta_{\check\theta}\right);\hat\theta_{\check\theta}(\omega)\right).$$

ここで $f(A,B;x)$ は次のように定義した：

$$f(A,B;x):=\sum_{j=1}^d (A^{-1})_j^i(x^j-B^j).$$

先ほどの $\delta>0$ を適当に取り直すことにより以下の条件が成立する:

$$\left|\operatorname{Tr}GV_\theta\left(M_{\check\theta},\tilde\theta_\theta\right)-\operatorname{Tr}GV_{\check\theta}\left(M_{\check\theta},\hat\theta_{\check\theta}\right)\right|<\epsilon,\quad |C_{\check\theta}(G)-C_\theta(G)|<\epsilon,$$
$$\forall\theta,\ \forall\check\theta\ \ s.t.\ \ d(\theta,\check\theta)<\delta. \tag{20}$$

したがって (20) より, 次の式が成立する：

$$\operatorname{Tr}G\left(J_\theta^{M_{\check\theta}}\right)^{-1}\le\operatorname{Tr}GV_\theta\left(M_{\check\theta},\tilde\theta_\theta\right)<\operatorname{Tr}GV_{\check\theta}\left(M_{\check\theta},\hat\theta_{\check\theta}\right)+\epsilon \tag{21}$$
$$=C_{\check\theta}(G)+\epsilon<C_\theta(G)+2\epsilon,\text{for}\quad d(\forall\theta,\forall\check\theta)<\delta. \tag{22}$$

よって条件 (B.5) が得られた.　□

[5]長岡 [6] の議論は，長岡自身が同論文で述べているように, 正当化されていない極限の入れ換えを用いている.

参考文献

[1] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory,* (Academic Press, New York, 1976).

[2] H. P. Yuen and M. Lax, IEEE trans. **IT-19**, 740 (1973).

[3] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, (North_Holland, Amsterdam, 1982).

[4] A.S. Holevo, IEEE trans. **IT-21**, 533 (1975).

[5] 長岡浩司 "量子状態推定の漸近理論について," 数理研究所講究録 **879**,pp. 155 (1994).

[6] 長岡浩司 "Kullbacl Divergence と Fisher 情報量について -古典系から量子系へ- ," 情報理論とその応用学会ジョイントミニワークショップ講演資料, pp. 63 (1992).

[7] 長岡浩司, 藤原彰夫, "量子情報理論と相対エントロピー," 数理科学, No. 380, pp. 50 (1995).

[8] 藤原彰夫, "量子推定理論入門," "現代数学序説（II）"(川久保勝夫，宮西正宜 編), 大阪大学出版会, 近刊.

[9] A. Fujiwara and H. Nagaoka, "Coherency in view of quantum estimation theory," in *Quantum coherence and decoherence*, edited by K. Fujikawa and Y. A. Ono, pp. 303 (Elsevier, Amsterdam, 1996).

[10] K. Matsumoto, "A Geometrical approach to quantum estimation theory,"doctoral thesis, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo (1997). METR **96-09**, University of Tokyo (1996). LANL e-print quant-ph/9711008 (1997).

[11] 長岡 浩司, "エルミート行列の同時対角化のある一般化とその量子推定理論との関係について," 日本応用数理学会論文誌, vol.1, No.4, pp.305-318, (1991).

[12] M. Hayashi, "A Linear Programming Approach to Attainable Cramér-Rao Type Bound," in *Quantum Communication, Computing, and Measurement*, edited by O. Hirota, A. S. Holevo, and C. M. Caves, (Plenum Publishing, New York, 1997).

[13] M. Hayashi, Kyoto-Math **97-08**, Kyoto University (1997). LANL e-print quant-ph/9704044 (1997).

[14] R. R. Bucklew *Large Deviation Techniques in Decision, Simulation, and Estimation* (Wiley, New York, 1990).